INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Matemática Aplicada

Nelson Mulemba

Cálculo Diferencial

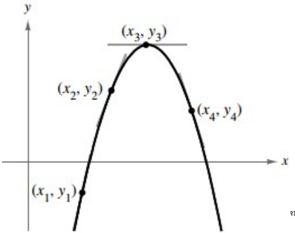
Maputo, March 21, 2024

Índice

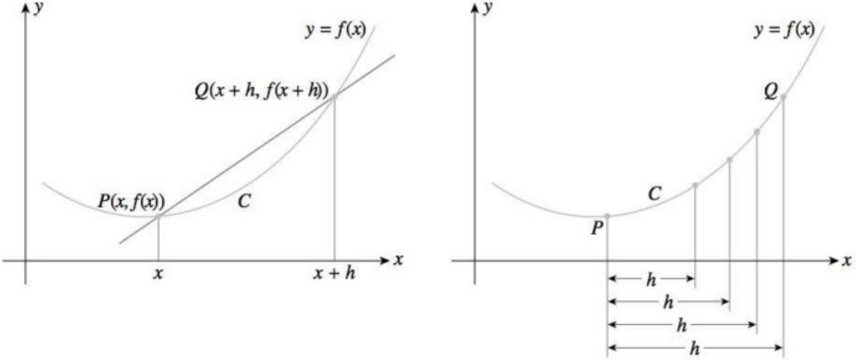
O cálculo é um ramo da matemática que estuda as taxas de variação de funções. Neste tema, veremos que taxas de variação possuem diversas aplicaçõees na vida real.

Na aula anterior, estudamos como a inclinação (declive) de uma recta indica a taxa pela qual ela cresce ou decresce. Essa taxa (ou inclinação) é a mesma para todos os pontos daquela recta. Para gráficos que não sejam rectas, a taxa pela qual esse gráfico cresce ou decresce muda de ponto para ponto.

Na Figura ao lado, a parábola está crescendo de forma mais rápida no ponto $(x_1; y_1)$ do que no ponto $(x_2; y_2)$ No vértice $(x_3; y_3)$ o gráfico é nivelado; no ponto $(x_4; y_4)$ ele está decrescendo.



Suponhamos que o gráfico de uma função f definida por $y = f(x)$. Então o ponto P é descrito por $P(x, f(x))$, e o ponto Q é descrito por $Q(x+h, f(x+h))$, onde h é um número não nulo.
Observe que ao fazer o ponto Q se aproximar ao ponto P no gráfico, faz com que h tende a zero.



(a) Os ponto $P(x, f(x))$ e $Q(x+h, f(x+h))$

(b) À medida que h se aproxima de zero, Q e se aproxima de P.

Determinando a variação de f em relação, tem-se:
Variação de f é: $f(x+h)-f(x)$ e a variação em x é $(x+h)-x$.
A variação de f a cada unidade de x é dada por
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, que representa a **Taxa de variação média de $f(x)$ em relação a** x no intervalo $[x, x+h]$.
Em seguida, quando a variação em x é muito pequena, tem-se que h tende a zero, o que pode ser escrito como,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

, obtem-se a **Taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a** x.

Definição de Derivada

Definição (Definição da Derivada)

A derivada de uma função $f(x)$ em relação a x é a função $f'(x)$ (f linha) definida por $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, desde que esse limite exista. Este limite mede a taxa de variação (instantânea) de $f(x)$ em x

Uma função é diferenciável ou derivável em x se a sua derivada existir em x. O processo utilizado para determinar derivadas é chamado de **derivação**.

Além de $f'(x)$, outras notações se $y = f(x)$, são:

$\frac{dy}{dx}$, y', $\frac{d}{dx}(f(x))$, $\frac{df}{dx}$

Procedimentos para Calcular Derivada por Definição

P1: Calcular $f(x+h)$

P2: Determinar a diferença $f(x+h)-f(x)$

P3: Achar o quociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

P4: Calcular o limite $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Exemplos

Exemplo (E1:)

Encontre a derivada por definição da função $f(x) = 3x + 5$

Resolução:

Exemplos

Exemplo (E1:)

Encontre a derivada por definição da função $f(x) = 3x + 5$

Resolução:

$$f(x+h) = 3(x+h) + 5 = 3x + 3h + 5$$
$$f(x+h) - f(x) = 3x + 3h + 5 - (3x + 5) = 3h$$
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3 \Longrightarrow f'(x) = 3$$

ISUTC INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Exemplos

Exemplo (E2:)

Encontre a derivada por definição da função $f(x) = x^2$ *e encontre* $f'(3)$

Resolução:

Exemplos

Exemplo (E2:)

Encontre a derivada por definição da função $f(x) = x^2$ *e encontre* $f'(3)$

Resolução:

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x \Longrightarrow f'(x) = 2x$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

A derivada foi determinada por meio do processo de limite. Esse processo é cansativo, mesmo se aplicado em funções simples. Porém, felizmente, existem regras que simplificam bastante a derivação.Essas regras permitem o cálculo de derivadas sem o uso direto dos limites.

Sejam $f(x)$, $g(x)$ funções em $\mathbb{R}$, com $k \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$

A1: $\dfrac{d}{dx}(C) = 0$

A2: $\dfrac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$

A3: $[kf(x)]' = kf'(x)$

A4: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;

A5: $[f^k(x)]' = kf^{k-1}(x)f'(x)$

A6: $[k^{f(x)}]' = f'(x)k^{f(x)} \ln f(x)$

A7: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

A8: $[\dfrac{f(x)}{g(x)}]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Exemplo (Aplicação:)

A Administração de uma certa companhia de Pneus descobriu que a função demanada semanal para seus pneus é dada por $p(x) = 144 - x^2$, *onde p é o preço por pneu, é medido em doláres e x é medido em milhares(*$x = 1$ *representa 1000 unidades). Calcule*

1. *A taxa de variação média no preço unitário do pneu se a quantidade demandada estiver entre 5000 e 6000 pneus e entre 5000 e 5100 pneus?*
2. *A taxa de variação instantânea do preço unitário quando a quantidade demandada for de 5000 unidades?*

Resolução:

Exemplo (Aplicação:)

A Administração de uma certa companhia de Pneus descobriu que a função demanada semanal para seus pneus é dada por $p(x) = 144 - x^2$, onde p é o preço por pneu, é medido em doláres e x é medido em milhares($x = 1$ representa 1000 unidades). Calcule

1. *A taxa de variação média no preço unitário do pneu se a quantidade demandada estiver entre 5000 e 6000 pneus e entre 5000 e 5100 pneus?*
2. *A taxa de variação instantânea do preço unitário quando a quantidade demandada for de 5000 unidades?*

Resolução:

A taxa de variação mdo preço unitário do pneu quando a quantidade está entre x e $x + h$ é dada por $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Para calcularmos a taxa de variação média do preço unitário de um pneu quando a quantidade demandada estiver entre 5000 e 6000 pneus (isto é no intervalo de $[5;6]$, tomamos $x = 5$ e $h = 1$ e obtemos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(6)-f(5)}{1} = \frac{144-6^2-(144-5^2)}{1} = -11$$

A taxa de variação do preço unitário de 1000 pneus é de -11 doláres. Ou seja, o preço unitário reduz cerca de 11 doláres por 1000 pneus após adquirir 5000 pneus. **Resolva a outra parte do exercício**.

Resolução: 2)

Quando a quantidade demandada é x, a taxa de variação instantânea do preço unitário é dado por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -2x$$

Substituindo $x = 5$ na derivada, tem-se $f'(5) = -2 \cdot 5 = -10$. A variação instantanea do preço por pneu é de -10 dólares por 1000 pneus.

Exemplos

Exemplo (E4:)

Determine a derivada da função $f(x) = 5x^3 + \dfrac{3}{\sqrt{x}} - 20x + 11$

Resolução:

Exemplos

Exemplo (E4:)

Determine a derivada da função $f(x) = 5x^3 + \dfrac{3}{\sqrt{x}} - 20x + 11$

Resolução:

Recorrendo as propriedades temos que:

$$f'(x) = [5x^3 + \frac{3}{\sqrt{x}} - 20x + 11]' = (5x^3)' + (\frac{3}{\sqrt{x}})' - (20x)' + (11)'$$

$$= 5(x^3)' + (3x^{-\frac{1}{2}})' - 20 + 0 = 5 \cdot 3x^2 + 3 \cdot (-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} - 20$$

$$= 15x^2 - \frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}} - 20 = 15x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x^3}} - 20$$

ISUTC INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Exemplo (Ex5:)

Determine a derivada da função definida por $g(t) = (-4t^2 + 9)^5$

Resolução:

Exemplo (Ex5:)

Determine a derivada da função definida por $g(t) = (-4t^2 + 9)^5$

Resolução:

$g'(t) = [(-4t^2 + 9)^5]' = 5(-4t^2 + 9)^4(-4t^2 + 9)' =$
$5(-4t^2 + 9)^4(-8t + 0)' = -40t(-4t^2 + 9)^4$

Exemplo (Ex5:)

Determine a derivada da função definida por $g(t) = (-4t^2 + 9)^5$

Resolução:
$g't) = [(-4t^2 + 9)^5]' = 5(-4t^2 + 9)^4(-4t^2 + 9)' =$
$5(-4t^2 + 9)^4(-8t + 0)' = -40t(-4t^2 + 9)^4$

Exemplo (E6:)

Determine a derivada da função definida por
$f(x) = (3x^2 + 4x)(-9x + 2)$

Resolução:

Exemplo (Ex5:)

Determine a derivada da função definida por $g(t) = (-4t^2+9)^5$

Resolução:
$g't) = [(-4t^2+9)^5]' = 5(-4t^2+9)^4(-4t^2+9)' =$
$5(-4t^2+9)^4(-8t+0)' = -40t(-4t^2+9)^4$

Exemplo (E6:)

Determine a derivada da função definida por
$f(x) = (3x^2+4x)(-9x+2)$

Resolução:
$f'(x) = (3x^2+4x)'(-9x+2) + (3x^2+4x)(-9x+2)' =$
$(6x+4)(-9x+2) + (3x^2+4x)(-9) =$
$-54x^2 + 12x - 36x + 8 - 27x^2 - 26x = -81x^2 - 60x + 8$

Exemplo (Ex 7:)

Determine a derivada da função definida por $f(t) = \dfrac{2}{t}$

Resolução:

Exemplo (Ex 7:)

Determine a derivada da função definida por $f(t) = \dfrac{2}{t}$

Resolução:

$$f'(t) = \left(\frac{2}{t}\right)' = \frac{(2)'t - 2(t)'}{t^2} = \frac{0-2}{t^2} = -\frac{2}{t^2}$$

Exemplo (Ex 7:)

Determine a derivada da função definida por $f(t) = \dfrac{2}{t}$

Resolução:

$$f'(t) = \left(\frac{2}{t}\right)' = \frac{(2)'t - 2(t)'}{t^2} = \frac{0-2}{t^2} = -\frac{2}{t^2}$$

Exemplo (Ex8:)

Determine as derivadas de todas as ordens da função definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 8$

Resolução:

Exemplo (Ex 7:)

Determine a derivada da função definida por $f(t) = \dfrac{2}{t}$

Resolução:

$$f'(t) = \left(\frac{2}{t}\right)' = \frac{(2)'t - 2(t)'}{t^2} = \frac{0-2}{t^2} = -\frac{2}{t^2}$$

Exemplo (Ex8:)

Determine as derivadas de todas as ordens da função definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 8$

Resolução:

$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 4x - 8)' = 3x^2 - 6x + 4$

f''(x)=$(3x^2 - 6x + 4)' = 6x - 6$

f'''(x)=(6x-6)'=6

$f^{iv}(x) = 0$, logo tem-se que $f^{(n)}(x) = 0, \quad n > 3$

Referências Bibliográficas

- TAN, S.T. (2014). Matemática aplicada a economia e administração. Cengage learning. São Paulo.
- LARSON, R. (2010). Cálculo aplicado. Cengage learning. São Paulo.

Obrigado pela Atenção!!!